

Neeuklidske geometrije

Vedrana Mikulić Crnković, Ivona Traunkar
Fakultet za matematiku, Sveučilište u Rijeci

Ovaj materijal je zaštićen sljedećom licencom:
CC BY-NC-ND 4.0 DEED
(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)



1 Povijesni uvod

Iako se pojava geometrije (zemljomjerstva) veže uz stare Egipćane koji su se njome bavili iz potrebe, razvoj geometrije počinje u staroj Grčkoj s Talesom iz Mileta za kojeg se smatra da je znanje Egipćana prenio u Grčku. Uz Talesa, javljaju se i Pitagora, Hipokrit, Platon, Aristotel i još brojna velika imena starogrčkih matematičara koji su svojim otkrićima pridonijeli razvoju geometrije. Sva saznanja o geometriji tadašnjeg vremena sistematizirao je Euklid (330.-275. p.n.e.) iz Aleksandrije u svojem velikom djelu *Elementi* u kojem geometriju zasniva deduktivno, odnosno aksiomatski. Euklid je nadmašio svoje prethodnike po sistematičnosti i cjelovitosti, a *Elementi* su ostali nenadmašeni više od dva tisućljeća. Iako su *Elementi* doživjeli mnoge kritike, ponajviše za definicije koje se smatraju najslabijom točkom *Elementa*, matematičarima tadašnjeg doba (a i kasnije) najviše su pažnje privukli Euklidovi postulati¹

1. neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina,
2. i da se ograničena dužina neprekinuto produžuje u dužinu,
3. i da se svakim središtem i udaljenošću opisuje krug,
4. i da su svi pravi kutovi međusobno jednaki,
5. i da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od pravog kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.

Najviše je kritiziran peti Euklidov postulat (poznat i kao aksiom o paralelama) za koji se smatralo da se može izvesti iz preostalih postulata i aksioma koje je Euklid naveo. Tijekom više od dvije tisuće godina matematičari su pokušavali dokazati peti postulat i pri tom su naišli na razne tvrdnje njemu ekvivalentne. Navedimo neke od njih.

- ▷ Neka je T točka koja ne pripada pravcu p . Tada postoji jedinstveni pravac q koji sadrži točku T i ima prazan presjek s pravcem p (u euklidskoj ravnini za pravce p i q kažemo da su paralelni).
- ▷ Neka su p i q paralelni pravci. Ako pravac p' siječe pravac p onda on siječe i pravac q .

¹Iskazi Euklidovih postulata preuzeti su iz [1]

- ▷ Neka su R i P dvije poluravnine određene pravcem p . Skup točaka poluravnine R koje su jednako udaljene od pravca p je pravac.
- ▷ Zbroj mjera kutova u trokutu jednak je π .
- ▷ Postoje slični trokuti.
- ▷ Pravac koji sadrži unutarnju točku trokuta siječe dvije stranice tog trokuta.
- ▷ Svake tri nekolinearne točke određuju jedinstvenu kružnicu.
- ▷ Kvadrat duljine hipotenuze pravokutnog trokuta jednak je zbroju kvadrata duljina njegovih kateta (Pitagorin poučak).

Budući da nikako nije uspijevalo direktno dokazivanje Euklidovog aksioma o paralelama, matematičari 18. stoljeća Saccheri i Lambert pokušali su, nezavisno jedan od drugoga, do dokaza doći na indirektan način (metodom kontrapozicije). Saccheri je bio uvjeren da je uspio dokazati peti postulat. Međutim, ono što je konstruirao danas nazivamo Saccherijev četverokut, a Saccherijevo razmatranje petog postulata možemo uzeti za početak hiperboličke geometrije. Puno bolje nije prošao ni Lambert, koji je uz pretpostavku da peti postulat ne vrijedi konstruirao Lambertov četverokut kojemu su tri kuta prava, a četvrti je tupi. Također, problem paralela proučava i N. I. Lobačevski koji dolazi do zaključka da je peti Euklidov postulat nezavisan od ostalih i time dolazi do nove geometrije koju danas nazivamo hiperboličkom geometrijom. Do sličnih zaključaka došao je i Gauss, no iz nepoznatih razloga svoja otkrića nikada nije objavio.

U pokušajima indirektnog dokazivanja aksioma o paralelama matematičari su pretpostavili da on ne vrijedi, odnosno pretpostavili su da vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji.

1. Neka je T točka koja ne pripada pravcu p . Tada svaki pravac koji sadrži točku T siječe pravac p .
2. Neka je T točka koja ne pripada pravcu p . Tada postoje barem dva pravca koja sadrže točku T i imaju prazan presjek s pravcem p .

Tek je Hilbert u 19. stoljeću dao potpunu, neproturječnu i konzistentnu aksiomatiku euklidske geometrije koju i danas koristimo. Prema Hilbertu, aksiomatika ravninske geometrije mora sadržavati osnovne pojmove (točke i

pravce), osnovne relacije ("pripadati", "biti između" i "biti kongruentan") koji se ne definiraju i konačan broj aksioma (tvrdnji koje se ne dokazuju) koji opisuju osnovne pojmove i relacije te izvedne pojmove (na primjer dužina, polupravac, kut, trokut i sl.).

Ravninska geometrija u kojoj vrijede svi aksiomi euklidske ravnine osim aksioma o paralelama umjesto kojega vrijedi tvrdnja 1. zove se sferna ravninska geometrija. Ako aksiom o paralelama zamijenimo tvrdnjom 2. dobivamo aksiomatiku ravninske hiperboličke geometrije.

Model pojedine ravninske geometrije je skup objekata (točaka i pravaca) na kojem se mogu definirati relacije "pripadati", "biti između" i "biti kongruentan" tako da su zadovoljeni aksiomi te geometrije.

1.1 Aksiomi euklidske ravninske geometrije

Prije navođenja aksioma navedimo neke izvedene pojmove.

- ▷ Za dvije različite točke A i B kažemo da tvore dužinu. Točke A i B su krajevi te dužine. Točka C je unutrašnja točka dužine ako je između vrhova te dužine.
- ▷ Polupravac s početnom točkom A kojemu pripada točka B je skup svih točaka koje su između točaka A i B i točaka C takvih da je B između točaka A i C .
- ▷ Kut je par polupravaca sa zajedničkom početnom točkom. Polupravci se nazivaju krakovi kuta.
- ▷ Za tri različite točke A , B i C koje ne pripadaju istom pravcu kažemo da tvore trokut. Točke A , B , C su vrhovi trokuta, a tri dužine određene s po dva vrha su stranice trokuta.

Aksiomi incidencije

1. Za svake dvije točke postoji jedinstveni pravac incidentan s njima.
2. Svaki pravac je incidentan s barem dvije točke.
3. Postoje tri točke koje ne pripadaju istom pravcu.

Aksiomi poretka

1. Ako je točka B između točaka A i C , tada su A , B , C tri međusobno različite točke koje pripadaju istom pravcu i točka B je između točaka C i A .
2. Ako su A i B dvije različite točke, tada postoji točka C takva da je točka B između točaka A i C .
3. Od tri različite točke koje pripadaju istom pravcu najviše je jedna točka između preostale dvije.
4. (Paschov aksiom) Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne sadrži niti jedan vrh tog trokuta, onda on siječe točno jednu od preostale dvije stranice trokuta.

Aksiomi kongruentnosti

1. Neka je zadana dužina s krajnjim točkama A i B i polupravac s početnom točkom A' . Tada postoji točka B' koja pripada tom polupravcu takva da su dužina s krajnjim točkama A i B i dužina s krajnjim točkama A' i B' kongruentne.
2. Ako je dužina s krajnjim točkama A i B kongruentna dužini s krajnjim točkama A' i B' i kongruentna dužini s krajnjim točkama A'' i B'' , tada su dužina s krajnjim točkama A' i B' i dužina s krajnjim točkama A'' i B'' kongruentne.
3. Neka je točka B između točaka A i C , točka B' između točaka A' i C' , dužina s krajnjim točkama A i B i dužina s krajnjim točkama A' i B' kongruentne i dužina s krajnjim točkama B i C i dužina s krajnjim točkama B' i C' kongruentne. Tada su dužina s krajnjim točkama A i C i dužina s krajnjim točkama A' i C' kongruentne.
4. Neka je dan kut s krakovima h i k . Neka je a' pravac, O' točka koja pripada pravcu a' i h' polupravac s početnom točkom O' koji pripada pravcu a' te neka je R jedna od dvije poluravnine određene pravcem a' . Tada postoji jedinstveni polupravac k' s početkom u točki O' koji pripada poluravnini R takav da su kut s krakovima h i k i kut s krakovima h' i k' kongruentni.
5. Neka su zadana dva trokuta s jednim parom kongruentnih kutova te neka su stranice trokuta koje pripadaju krakovima kongruentnih kutova kongruentne. Tada postoji još jedan par kongruentnih kutova.

Aksiom o paralelama

1. Neka je p pravac i T točka koja ne pripada pravcu p . Tada postoji točno jedan pravac koji sadrži točku T i ne siječe pravac p .

Aksiom neprekidnosti

1. (Dedekindov aksiom) Neka je zadana dužina s krajnjim točkama A i B , neka su sve točke te dužine podijeljene u dvije klase I i II tako da je A u klasi I i B u klasi II te da je svaka unutrašnja točka te dužina u točno jednoj klasi i neka je svaka točka klase I različita od A između točke A i bilo koje točke klase II. Tada postoji jedinstvena točka C te dužine takva da sve točke između točaka A i C pripadaju jednoj klasi i sve točke između C i B drugoj klasi.

2 Analitička geometrija euklidskog prostora

2.1 Ravnina u prostoru

Ravnina π u \mathbb{E}^3 je skup točaka prostora \mathbb{E}^3 za koje vrijedi:

1. skup π nije sadržan niti u jednom pravcu u \mathbb{E}^3 ,
2. pravac koji sadrži bilo koje dvije različite točke iz skupa π sadržan je u skupu π ,
3. skup π ne sadrži sve točke prostora \mathbb{E}^3 .

Podsjetimo se, svaka ravnina π u analitičkom modelu euklidskog prostora jednoznačno je određena sa:

1. tri nekolinearne točke T_1, T_2, T_3 (uočimo da tada te tri točke određuju dva neproporcionalna vektora: $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_3}$.)
2. pravcem i jednom točkom koja mu ne pripada,
3. dva pravca koja se sijeku,
4. dva paralelna pravca.

Također, ravninu možemo jednoznačno odrediti točkom i vektorom normale: vektorom okomitim na ravninu.

Napomena. Vektor \vec{n} okomit je na ravninu π ako je okomit na svaki vektor koji pripada ravnini π . Vektor \vec{n} nazivamo **vektorom normale** ravnine π .

Neka je zadana točka $T_1 \in \pi$ i vektor normale \vec{n} ravnine π . Odredimo jednadžbu ravnine Π .

Za svaku točku $T_1 \in \pi$ vrijedi da je $\overrightarrow{T_1T} \perp \vec{n}$, tj. vrijedi da je $\overrightarrow{T_1T} \cdot \vec{n} = 0$.

Pretpostavimo li da je točka $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i vektor $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, tada za proizvoljnu točku $T(x, y, z) \in \pi$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T_1T} \cdot \vec{n} &= 0 \\ \left((x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k} \right) \cdot (A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}) &= 0 \\ A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) &= 0\end{aligned}$$

Stavimo li u prethodnoj jednadžbi da je $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$, dobivamo da je jednadžba ravnine $\pi \dots Ax + By + Cz + D = 0$.

Uočimo: ako je $D = 0$, ravnina π sadrži ishodište.

Primjer. Odredite jednadžbu ravnine π koja sadrži točku $T(1, -2, 1)$ i čiji vektor normale je $\vec{n} = -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.

Neka je $T(x, y, z)$ proizvoljna točka ravnine π . Tada iz $\overrightarrow{T_1T} \cdot \vec{n} = 0$ dobivamo

$$\begin{aligned}-1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - (-2)) + 4(z - 1) &= 0 \\ \Pi \dots -x + y + 4z &= 0.\end{aligned}$$

Okomite ravnine. Uočimo da su dvije ravnine π_1 s vektorom normale \vec{n}_1 i π_2 s vektorom normale \vec{n}_2 okomite ako su okomiti vektori \vec{n}_1 i \vec{n}_2 , tj. ako je $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

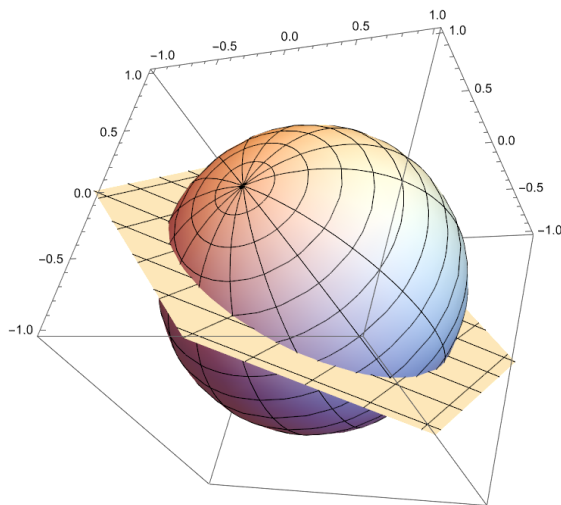
3 Sferna ravnina kao podskup u \mathbb{R}^3

3.1 Model sfrene ravnine na jediničnoj sferi

Skup točaka sfere ravnine je skup $\mathbb{S}^2 = \{X \in \mathbb{E}^3 \mid |r_X| = 1\}$, odnosno jedinična sfera sa središtem u ishodištu. Neka je \vec{e} jedinični vektor u \mathbb{R}^3 . Skup $p = \{X \in \mathbb{S}^2 \mid \vec{e} \cdot r_X = 0\}$ je **pravac s polom** \vec{e} u \mathbb{S}^2 . Pravac p zovemo **polara** od \vec{e} .

Iz definicije slijedi da je pravac u sfernoj ravnini tzv. velika kružnica koja pripada sferi, odnosno presjek sfere i ravnine koja sadrži ishodište s vektorom normale \vec{e} .

Uočimo da je u ovom modelu relacija incidencije zadana relacijom pripadnosti.



Slika 1: Presjek sfere i ravnine koja sadrži ishodište - velika kružnica na sferi

Dvije točke P i Q sfere ravnine su **antipodalne** ako je $r_P = -r_Q$ (zamislimo npr. sjeverni i južni pol). Uočimo da vrijedi sljedeće.

Teorem 1 Neka je p pravac u \mathbb{S}^2 .

1. Ako je \vec{e} pol pravca p , onda je to i $-\vec{e}$.

2. Ako pravac p sadrži točku P , onda on sadrži i točku $-P$, $r_{-P} = -r_P$.

Teorem 2 Neka su P i Q dvije različite točke ravnine \mathbb{S}^2 koje nisu antipodalne. Tada postoji jedinstveni pravac koji sadrži točke P i Q .

Dokaz: Tražimo pravac $p = \{X \in \mathbb{S}^2 \mid \vec{e} \cdot r_X = 0\}$ s polom \vec{e} koji sadrži zadane točke. Iz definicije pravca, pravac p sadrži točku P ako je $\vec{e} \cdot r_P = 0$ te pravac p sadrži točku Q ako je $\vec{e} \cdot r_Q = 0$. Pitamo se postoji li jedinični vektor \vec{e} koji je istovremeno ortogonalan na vektore r_P i r_Q . Ako vektori r_P i r_Q nisu proporcionalni (a nisu zato što točke P i Q nisu antipodalne), onda je njihov vektorski produkt različit od $\mathbf{0}$ te slijedi $\vec{e} = \pm \frac{r_P \times r_Q}{|r_P \times r_Q|}$. Oba vektora određuju isti pravac pa je traženi pravac p jedinstven.

□

Pravac sferne ravnine je presjek ravnine koja sadrži ishodište i sfere \mathbb{S}^2 . Obzirom da je svaka ravnina određena sa tri nekolinearne točke, pravac koji sadrži točke $P, Q \in \mathbb{S}^2$ odredimo kao presjek sfere \mathbb{S}^2 i ravnine određene s P, Q i ishodištem. Drugim riječima, pravac PQ u sfernoj ravnini je kružnica u \mathbb{R}^3 koja ima središte u ishodištu i sadrži točke P i Q .

Uočimo da za par antipodalanih točaka postoji beskonačno mnogo pravca koji sadrže te točke.

3.2 Odnos dvaju pravaca

Teorem 3 (S3) Neka su p i q različiti pravci u \mathbb{S}^2 . Tada p i q imaju točno dvije točke u presjeku i te su točke antipodalne.

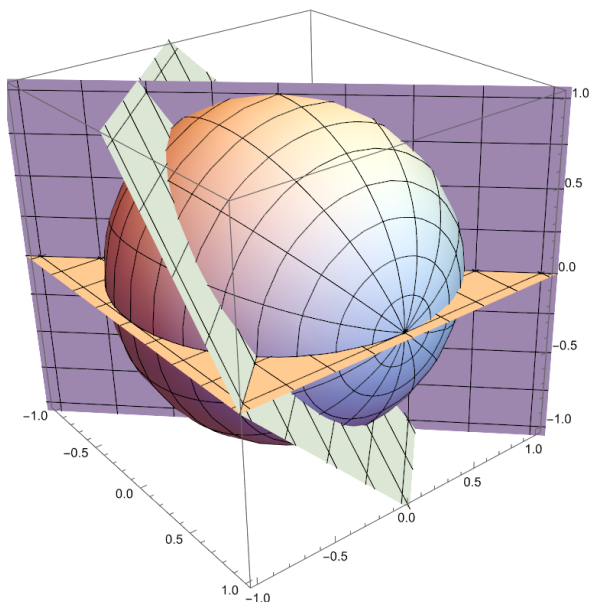
Sjecište pravaca p i q tražimo tako da odredimo presjek dviju ravnina kojima su definirani pravci p i q . Kako te dvije ravnine sadrže ishodište, njihovo sjecište je pravac koji sadrži ishodište. Taj pravac probada sferu upravo u antipodalnom paru točaka $\pm S$.

Korolar 1 Nikoja dva pravca u \mathbb{S}^2 nisu paralelna (gdje su paralelni pravci definirani kao pravci koji nemaju zajedničkih točaka).

Pravci p i q su **okomiti** u \mathbb{S}^2 ako su im polovi ortogonalni, odnosno ako su ravnine kojima su zadani ti pravci okomite. Jednostavnom argumentacijom dobivamo da vrijede sljedeće dva teorema.

Teorem 4 *Neka su p i q različiti pravci u \mathbb{S}^2 . Tada postoji jedinstveni pravac r takav da je $p \perp r$ i $q \perp r$.*

Teorem 5 *Neka je p pravac u \mathbb{S}^2 i T točka u \mathbb{S}^2 . Ako r_T nije pol pravca p , onda postoji jedinstveni pravac q koji sadrži točku T i okomit je na pravac p .*



Slika 2: Zajednička okomica dva pravca sferne ravnine

Uočimo da za točku T koja je pol pravca p postoji beskonačno mnogo pravaca koji sadrže tu točku i okomiti su na pravac p .

4 Hiperbolička ravnina

O modelu hiperboličke ravnine u \mathbb{R}^3 pročitajte na poveznici

http://e.math.hr/math_e_article/vol22/Crnkovic

Literatura

- [1] Euclides, Elementi 1-6, prevela M. Hudoletnjak Grgić, Kruzak d.o.o., Zagreb, 1999.
- [2] Ryan, P. J.: Euclidean and non-Euclidean Geometry – an Analytic Approach, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.